Matematiko: Al senlimo kaj pretere

JONATHAN COOPER (GOSFORD)

Bazita sur prelego dum la Aŭstralia kaj Nov-Zelanda Kongreso de Esperanto, januaro 2022

Kio estas matematiko? Ĉu nombrado? Ĉu aritmetiko? Ĉu la reĝino (aŭ la servisto) de la sciencoj?

Se oni demandus tion al kelkaj matematikistoj, oni verŝajne ricevus multajn diversajn respondojn. Plej multaj, tamen, resumiĝas kiel unu el du bazaj opinioj. Unu estas, ke matematikaj "objektoj" ekzistas sendepende de nia scio pri ili. La alia estas, ke ne ekzistas matematikaj "objektoj", ke matematiko estas simple la manipulado de simboloj laŭ sistemoj de reguloj, sistemoj inventitaj de matematikistoj. La unua opinio nomiĝas "**platonismo**" (laŭ la nomo de Platono, kiu kredis, ke ekzistas perfekta mondo de puraj formoj malantaŭ la realeco, kiun ni spertas en ĉiutaga vivo) kaj la dua nomiĝas "**formalismo**" (ĉar ĝi vidas matematikon kiel formalan sistemon). Platonistoj ofte diras, ke ili *malkovras* matematikajn teoremojn, tamen formalistoj ofte diras, ke ili nur *ludas* per simboloj. La diferenco inter tiuj du aliroj iĝis pli kaj pli signifa dum matematiko evoluis.

La historio kaj evoluo de matematiko estas markitaj per serio da krizoj: tempoj kiam antaŭe akceptitaj principoj estis renversataj.

La plej frua uzo de tio, kion ni nun nomas "matematiko" estis nombrado de objektoj (verŝajne havaĵoj). Do, nombroj estis simple "1, 2, 3, 4, ..." ktp. Teorie, ne ekzistis plej granda nombro, sed praktike, tio estis determinita de la probableco, ke oni havus tiom da aferoj por kalkuli. Poste, oni enkondukis frakciojn. Tio ne estis vera krizo, sed sendube koncepta salto. Unuafoje homoj povis dividi tortojn juste inter pluraj homoj.

Nulo

La unua vera krizo estis nulo. Sen nulo, matematiko, kiel ni konas ĝin (tio estas, la pozicia sistemo, kiu reprezentas dek kiel 10 kaj cent kiel 100, prefere ol X kaj C, respektive), estus malebla.

Kial do nulo estis krizo? Ĝi estis parte konfuzo ("Kiel 'nenio' povas esti nombro?") kaj parte timo pri la granda nekonataĵo – la "abismo".

Negativaj nombroj

Negativaj nombroj ebligis financajn transakciojn (per kreditoj kaj debetoj), interalie. Tamen ankaŭ ili kaŭzis krizon kiam ili unue estis uzitaj. Kial? Ĉar ili etendis la bazan koncepton de "nombro". Nombro origine signifis korespondadon unu-al-unu inter du aroj: aro da objektoj por esti nombrataj kaj aro da abstraktaj "unuoj". Do, kiel oni povas havi, ekzemple, minus 5 ŝafojn?

Neracionalaj nombroj

Imagu kvadraton unu metron kontraŭ unu metro. Pitagoro pruvis, ke la longo de la diagonalo estas nombro kiu, kiam kvadrata, egalas al 2 (tio estas √2).

Kial tio estis krizo? Matematikistoj iam kredis, ke ĉiu nombro povus esti esprimata kiel la rilatumo de du entjeroj. Do, ekzemple, 3 = 3/1 kaj 3,127 = 3127/1000. Jen la bazo de mezurado: oni mezuras, ekzemple, longon uzante bastonon, kiu estas markita per mezur-streketoj kaj submezur-streketoj. Sed oni

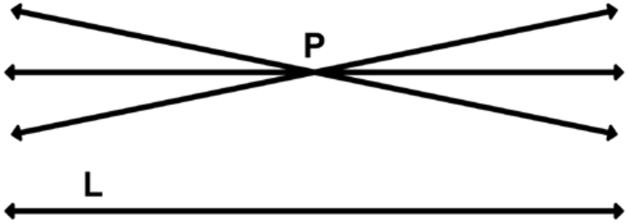

Fig 1: La 5a geometria aksiomo de Eŭklido: Oni povas desegni unu kaj nur unu linion, kiu pasas tra punkto P, kiu estas paralela al linio L.

povas pruvi, sen tro da malfacileco, ke ne ekzistas nombro p/q (kie p kaj q estas tutaj nombroj) kiu, kvadrata, donas 2. La sekvo estas, ke oni povus havi distancon – aŭ iun ajn kvanton – kiu neniam povus esti precize mezurata, ĉar ĝi ne povas esti esprimata kiel frakcio. Tiajn nombrojn oni nomas "neracionalaj".

Ne-eŭklida geometrio

La kvina geometria aksiomo de Eŭklido deklaras ke, se oni havas linion (L) kaj punkton ne sur tiu linio (P), oni povas desegni unu kaj nur unu linion, kiu pasas tra tiu punkto, kiu estas paralela al la linio L. Tio supozas, ke ĉio estas sur ununura ebeno. (Vidu Figuron 1.)

Ne-eŭklida geometrio estas sistemo konstruita laŭ malakcepto de tiu aksiomo. En normala (eŭklida) geometrio, la sumo de la tri anguloj en iu triangulo ĉiam estas 180 gradoj. En ne-eŭklida geometrio, aliflanke, la sumo povus esti pli ol 180 gradoj, aŭ malpli ol 180 gradoj. Kvankam ĝi kontraŭas "komunan saĝon", ĝi estas perfekte konsekvenca kiel sistemo. Alivorte, ĝi neniam kondukos al internaj kontraŭdiroj.

La kialo kial ne-eŭklida geometrio estis krizo estas pli malfacile klarigebla ol negativaj kaj neracionalaj nombroj, sed la kvin aksiomoj de Eŭklido estis la bazo de geometrio dum jarcentoj. Ankaŭ, la sistemo de "pruvoj sidantaj sur pruvoj, sidantaj sur pruvoj, kaj tiel plu, sidantaj sur la aksiomoj", estis la modelo laŭ kiel la tuto de matematiko funkciis. Ne-eŭklida geometrio defiis, aŭ malakceptis, la absolutecon de la aksiomoj.

Infinitezimoj

Infinitezimoj estas kvantoj pli grandaj ol nul sed pli malgrandaj ol iu ajn alia pozitiva nombro. Tio estas la bazo de kalkulo, kiu estas uzata dum jarcentoj ĉar ĝi produktas ĝustajn respondojn, kvankam multaj matematikistoj ankoraŭ rigardas ĝin kiel nelogika. Tio estas la malo de paradokso: Ĝi "ne devus" funkcii, sed ĝi ja funkcias!

Imaginaraj (kaj kompleksaj) nombroj

Kiam oni kvadratas pozitivan nombron, oni ricevas pozitivan nombron (ekz. 4 x 4 = 16); kiam oni kvadratas negativan nombron, oni ricevas ankaŭ pozitivan nombron (ekz. −4 x −4 = 16), ĉar la du negativoj "nuligas unu la alian". Do, se la kvadrato de iu nombro estas ĉiam pozitiva, kiel negativa nombro povus havi kvadratan radikon? Pri "realaj" nombroj, ili ne povas. Sed kio okazus se ni imagas, ke ni ja povus? Kio okazus se ni dirus, ke la kvadrata radiko de −1 estas "i" (por "imaga")? Se ni tion faras, $i^2 = -1$ kaj $\sqrt{-4} = 2i$, ktp.

Priskribi nombrojn kiel aŭ "imagajn" aŭ "realajn" ŝajne implicas, ke ekzistas ia hierarkio de – aŭ valorjuĝo pri – nombroj. Matematikistoj nun konfesas,

Fig 2: Krado de racionalaj nombroj

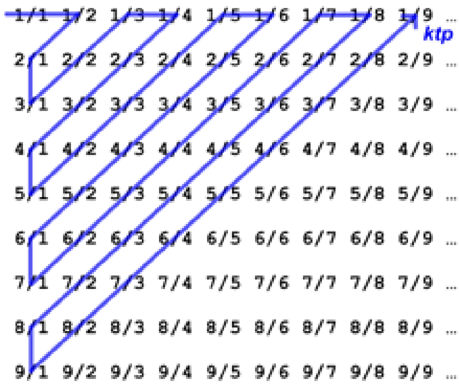

Fig 3: Kiel nombri ĉiujn racionalajn nombrojn

ke tiuj nomoj estas nelogikaj kaj arbitraj, sed la nomoj (almenaŭ en la angla: “imaginary” kaj “real”) restas, kaj ili estas oportunaj. Fakte, en Esperanto estas specialaj matematikaj vortoj por priskribi “normalan” nombron: “**reela**”, kaj nombron, kiu estas la kvadrata radiko de negativa nombro: “**imaginara**”.

Krome, reelaj kaj imaginaraj nombroj ankaŭ povas esti kombinataj por formi “kompleksajn nombrojn” (ekz. $3i$+7).

Senfinaj nombroj

Matematikistoj jam delonge akceptis la koncepton de senfineco (ĉar ne ekzistas “la plej alta ebla nombro”) kaj, pli lastatempe, infinitezimojn. Tamen, la sekva krizo estis la koncepto, ke ekzistas *gamo* da senfinaj nombroj.

Vi eble demandas: “Kiel unu senfina nombro povas esti pli granda ol alia?”

Konsideru la kradon de racionalaj nombroj, aŭ frakcioj, en Figuro 2.

La numeratoroj (la supraj – nombroj en la frakcioj) pliiĝas per unu kiam oni paŝas malsupren, kaj la denominatoroj (la malsupraj – nombroj) pliiĝas per unu kiam oni paŝas desktren. Do, se la krado estus etendata eterne dekstren kaj malsupren, ĉiu racionala nombro devus esti listigita almenaŭ unufoje. Se vi estus leterportisto kaj devus liveri poŝton al ĉiu frakcio en la krado, kiun vojon vi irus? Ne estus bone fari unue la supran vicon, ĉar vi neniam atingus la sekvan vicon. Same pri la maldekstra kolumno. La solvo estas sekvi vojon kiel la bluaj linioj en Figuro 3.

Sekvante tiun vojon, iu ajn specifita racionala nombro estos atingita post difinita nombro da paŝoj. Tio signifas, ke la aro de racionalaj nombroj povas esti “nombrata”, ĉar por iu ajn membro estas responda membro de la aro de entjeroj. Tiu respondado unu-al-unu estas nomita “mapado”.

La senfinaĵo, kiu povas esti mapita al la aro da tutaj nombroj estas nomita $\aleph_0$ (“alefo nul”). Ĝi estis nomata tion fare de la pioniro de senfina nombroteorio, Georg Cantor.

Ĉu oni povas trarompi la baron de $\aleph_0$ al pli granda senfina nombro?

Ni kompilu hazardan liston de unikaj reelaj nombroj inter 0 kaj 1, esprimitaj kiel decimaloj. Tiuj povas esti racionalaj aŭ neracionalaj. Jen la komenco de unu tia listo, montrante la unuajn naŭ decimalajn lokojn por ĉiu nombro:

r(1) = 0 , **1** 4 1 5 9 2 0 5 3
r(2) = 0 , 3 **3** 3 3 3 3 3 3 3
r(3) = 0 , 7 1 **8** 2 8 1 8 2 8
r(4) = 0 , 4 1 4 **2** 1 3 5 6 2
r(5) = 0 , 5 0 0 0 **0** 0 0 0 0
r(6) = 0 , 2 4 4 9 1 **9** 3 1 0
r(7) = 0 , 0 5 8 8 2 4 **1** 9 7
r(8) = 0 , 9 8 7 6 5 4 3 **2** 1
r(9) = 0 , 0 0 1 0 2 5 5 2 **9**

Ĉar ili estas en senfina serio, estas $\aleph_0$ da nombroj. Tamen, ni povas krei novan nombron, uzante la unuan ciferon (post la punkto) de nombro r(1), la duan ciferon de r(2), la trian ciferon de r(3), kaj tiel plu, sed adiciante unu ĉiufoje (krom se la cifero estas 9, tiam ĝi fariĝas 0). Do, en tiu ekzemplo, sekvante la grasajn ciferojn laŭ la diagonalo, ni havas 0,138209129... Poste, adiciante unu al ĉiu cifero, ni ricevos 0,249310230... Tio ne povus egali al iu el la ekzistantaj nombroj en nia serio, ĉar ĝi diferencas de ĉiu el ili en almenaŭ unu dekuma loko. Tio montras, ke neniam povas ekzisti respondado unu-al-unu inter la du aroj. Tial, ekzistas pli da reelaj nombroj inter nulo kaj unu *ol ĉiuj entjeroj*!

Do, devas ekzisti pli granda, aŭ "pli alta speco de" senfina nombro, kiu nomiĝas $\aleph_1$ ("alefo unu"). (Fakte ekzistas eĉ pli grandaj senfinaj nombroj ol tiuj du.)

Teoremo de nekompleteco

La fina krizo – kaj senkompare la plej profunda – ekestis nerekte el senfina nombroteorio.

Ni konstatis, ke la nombro da tutaj nombroj estas $\aleph_0$ kaj la nombro da reelaj nombroj estas $\aleph_1$. Iuj matematikistoj scivolis, ĉu ekzistas senfina nombro inter $\aleph_0$ kaj $\aleph_1$? En 1878, Cantor deklaris ke sia "intuo" (aŭ hipotezo) estis ne. Tio estas konata kiel la Kontinuuma Hipotezo. Dum sesdek jaroj matematikistoj klopodis pruvi aŭ kontraŭpruvi tion. Fine, en 1938, la germana matematikisto Kurt Gödel pruvis, ke la Kontinuuma Hipotezo (KH) estas kongrua kun aroteorio, sed nepruvebla. Tio estas, ĝi neniam kondukos al kontraŭdiro. Sed tio ankaŭ validas por la malo de KH (tio estas, ke ekzistas almenaŭ unu senfina nombro inter $\aleph_0$ kaj $\aleph_1$).

Do, kiun ni akceptu? La ĝusta respondo, kredu aŭ ne, estas "iun ajn"! Tamen, estas pli simple supozi ke KH estas vera. Tio estas ekzemplo de la principo konata kiel la "Razilo de Ockham" ("Se estas pluraj kontraŭaj teorioj kaj neniu povas esti pruvita aŭ kontraŭpruvita, akceptu la pli simplan").

Gödel povis ĝeneraligi sian pruvon por aserti: "Ekzistas deklaroj pri nombroteorio, kiuj estas kongruaj kun, sed nepruveblaj per, la sistemo de nombroteorio."

Tio rilatas al la fama necerteca principo de Heisenberg en fiziko[1]. La necerteca principo rilatas al la kvantuma naturo de la universo. "Tamen," ni eble pensas, "ĉu la abstrakta kampo de matematiko ne estas imuna kontraŭ tio?!" Fakte, ne.

Gödel puŝis alian kojnon inter platonismo kaj formalismo: La platonistoj respondis al tiu teoremo per aserti: "La formala sistemo estas tro malforta," dum la formalistoj respondis: "La platonisma vidpunkto estas sensenca, ĉar aksiomoj estas arbitraj."

1. Ne eblas samtempe scii kaj la precizan pozicion kaj la movokvanton de subatoma partiklo.